

# Traitement du problème d'optimisation de mélange dans le cas de données incertaines via les fonctions de croyance

Lucie Jacquin<sup>1</sup>

Abdelhak Imoussaten<sup>1</sup>

Sébastien Destercke<sup>2</sup>

<sup>1</sup> EuroMov Digital Health in Motion, Univ Montpellier, IMT Mines Ales, Ales

<sup>2</sup> Sorbonne universités, UTC, CNRS, Heudiasyc

6 avenue de Clavières, F-30 319 Alès, France, + prénom.nom@mines-ales.fr

57 Avenue de Landshut, Compiègne, France, + prénom.nom@hds.utc.fr

## Résumé :

Les sorties des algorithmes de classification sont souvent utilisées comme décision finale. Pourtant, dans certaines situations, ces sorties peuvent servir comme entrées à un problème de décision soumis à des contraintes. Dans cet article nous traitons ce problème pour le cas d'une optimisation de mélange de pièces de matériaux hétérogènes rangés dans différents conteneurs. L'information sur les matériaux composant chaque pièce est donnée sous forme de fonction de masse fournie par un classifieur évidentiel. Cet article propose un énoncé de ce problème d'optimisation de mélange dans le cadre des fonctions de croyance. Nous illustrons la résolution d'un tel problème dans le cas du tri des matières plastiques à des fins de recyclage.

## Mots-clés :

Fonctions de croyance, addition de fonctions de masse, optimisation de mélanges, tri de plastiques.

## Abstract:

Predictions from classification models are most often used as final decisions. Yet, there are situations where the prediction serves as an input for another constrained decision problem. In this paper, we consider such an issue where the classifier provides imprecise and/or uncertain predictions that need to be managed within the decision problem. More precisely, we consider the optimisation of a mix of material pieces of different types in different containers. Information about those pieces is modelled by a mass function provided by a cautious classifier. Our proposal concerns the statement of the optimisation problem within the framework of belief function. Finally, we give an illustration of this problem in the case of plastic sorting for recycling purposes.

## 1 Introduction

Le mélange de matériaux avec les bonnes quantités est un problème commun à de nombreuses industries, que ce soit de production ou de retraitement. Selon les propriétés souhaitées, le mélange doit répondre à certaines contraintes sur les proportions de chaque matériau. Dans

le cas où le mélange se construit progressivement, il faut connaître, à chaque étape, les matériaux présents dans la pièce à ajouter et les matériaux présents dans le mélange déjà existant afin de vérifier si le nouveau mélange respecte les contraintes sur les proportions. Ce problème peut notamment être rencontré dans les situations suivantes : lors du raffinage du pétrole brut en produits pétroliers, il faut gérer le mélange de différents produits d'hydrocarbures ; lors du recyclage du plastique, les portions de certains types de matériaux ne doivent pas dépasser certains seuils ; lors de la production de certaines boiseries où chaque type de boiserie est fabriqué en collant et en pressant ensemble un mélange de différents copeaux de pin et de chêne ; etc.

Le travail présenté dans cet article est motivé par le problème du tri automatique de plastiques par des machines munies de technologie optique (par exemple infra-rouge) à des fins de recyclage, et servira pour les exemples et l'illustration de notre proposition. Ce problème consiste à trouver le conteneur dans lequel il faut souffler chacun des fragments de plastique issus d'un flux de déchets. Les fragments en question peuvent être composés de matériaux différents et le mélange obtenu dans un conteneur doit satisfaire certaines contraintes sur les proportions de matériaux qu'il contient. En effet, si les matériaux considérés comme impuretés dépassent certains seuils dans un mélange, la qualité du produit recyclé est fortement

dégradée. L'objectif de ce travail est alors de proposer une procédure de tri qui optimise la qualité du produit recyclé.

Dans les conditions industrielles de tri, plusieurs perturbations affectent le signal obtenu par la machine [3]. Par conséquent, l'information obtenue, pour un fragment donné, est entachée d'incertitude et d'imprécision. Pour garder cette information, nous avons considéré un résultat de classification sous forme de fonction de masse modélisant nos connaissances sur les types de matériaux composant le fragment. Pour simplifier notre problème, nous faisons l'hypothèse qu'un fragment est pur, i.e., composé d'un seul matériau.

L'outil classique pour formaliser un problème d'optimisation sous incertitude est l'optimisation stochastique. L'article propose d'étendre ce dernier au cadre des fonctions de croyance, d'abord en considérant l'intégrale de Choquet au lieu de l'espérance classique comme fonction objectif, et puis en remplaçant la mesure de probabilité par la paire de mesures composée de la mesure croyance et la mesure de plausibilité. Lorsque nous ajouterons des fragments à un conteneur donné, nous devrons également calculer l'incertitude globale sur la composition d'un conteneur en sommant des fonctions de masse de différents poids. Pour ce faire, nous adapterons la technique proposée dans [2] pour les intervalles généraux au cas de proportions discrètes.

L'article est organisé comme suit. La formalisation du problème d'optimisation stochastique est présentée dans la section 2. Dans la section 3 nous donnons quelques rappels sur les fonctions de croyance, l'opération d'addition sur les fonctions de masse et l'intégrale de Choquet. Dans la section 4, le problème d'optimisation du tri est posé dans le cadre des fonctions de croyance. Une illustration concernant le tri des plastiques est présentée dans la section 5.

## 2 Formalisation du problème d'optimisation stochastique

Considérons un dépôt de déchets plastiques, de pétrole brut, de bois, etc., composé de plusieurs petites pièces avec un poids physique total  $W$ . Ces pièces doivent être triées dans  $C$  conteneurs selon leurs composition. Au final, chaque conteneur  $c \in \{1, \dots, C\}$  contiendra un poids de matériau  $w_c^{end}$ , avec  $\sum_{c=1}^C w_c^{end} = W$ . Les  $n$  types de matériaux considérés sont représentés par l'ensemble  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ , et nous désignons par  $\theta_i^{c,end}$  la proportion du matériau  $s_i$  présent dans le bac  $c$  en fin de tri.

Étant donnée que les pièces sont conduites sur un convoyeur, la décision de tri est appliquée au moment de souffler une pièce dans l'un des conteneurs. Ainsi, le processus de tri du dépôt est traité par étape. Pour éviter de compliquer les notations, nous omettons la référence au temps, i.e., à l'étape, dans le problème d'optimisation. Le problème d'optimisation stochastique peut être défini comme suit :

$$\max_{c \in \{1, \dots, C\}} \mathbb{E}_{p(\cdot|f)}[g_c] \quad (1a)$$

sous les contraintes : pour tous  $c=1, \dots, C$

$$\mathbb{P}_{f,c}(h_{c,A}(\theta_1^c, \dots, \theta_n^c) \leq 0) \geq \eta, \quad (1b)$$

$$\sum_{i=1}^n \theta_i^c = 1. \quad (1c)$$

où :

- La fonction objectif (1a) est telle que  $g : S \rightarrow \mathbb{R}^+$ , avec  $g_c(s_i)$  le gain obtenu si un matériau de type  $s_i$  est ajouté au conteneur  $c$ ;
- $\theta_i^c$  est la proportion du type de matériau  $s_i$  dans le conteneur  $c$  après  $y$  avoir ajouté la nouvelle pièce  $f$ ,
- $p(\cdot|f)$  est la probabilité *a posteriori* que la nouvelle pièce soit un des matériaux dans  $S$ .

- $\mathbb{E}_{p(\cdot|f)}$  est l'espérance mathématique associée à  $p(\cdot|f)$ ,
- Les contraintes (1b) sont exprimées en utilisant la fonction  $h_c : [0, 1]^n \rightarrow [-1, 1]$  sous la forme  $h_{c,A}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{i \in A} \theta_i - \alpha_c \leq 0$  avec  $A \subseteq S$ . Cela signifie que la proportion de matériaux de types  $A$  ne doit pas dépasser  $\alpha_c$  dans le conteneur  $c$ ,
- Si nous notons par  $p_c \oplus p(\cdot|f)$  le résultat de l'addition des proportions probabilistes  $p_c$  dans le conteneur à  $p(\cdot|f)$ , ce qui représente le poids actuel du conteneur et le poids de  $f$ ,  $\mathbb{P}_{f,c}$  est la mesure induite par la probabilité  $p_c \oplus p(\cdot|f)$ ,
- $\eta$  est un seuil généralement considéré proche de 1,
- La contrainte (1c) signifie simplement que les proportions somment à 1.

Remarquons que  $p(\cdot|f)$  peut être converti en probabilités sur le sous-ensemble discret de proportions  $\{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 1)\}$  de  $[0, 1]^n$ . En effet, pour vérifier dans quelle mesure les contraintes sont satisfaites, il faudra calculer les probabilités sur les proportions.

Nous allons, dans la suite, proposer une extension du problème (1a)-(1b) au cadre des fonctions de croyance.

### 3 Rappels

#### 3.1 Fonctions de croyance

Les fonctions de croyance [6] [8] sont des modèles d'incertitude qui combinent des représentations d'incertitude probabilistes et ensemblistes, fournissant ainsi un cadre expressif et flexible pour représenter différents types d'incertitude.

Étant donné un espace  $\mathcal{X}$  muni d'éléments  $x$ , l'outil de base utilisé dans la théorie des fonctions de croyance est la *fonction de masse*,

également appelée *basic belief assignment* (bba) en anglais. Celle-ci est une fonction ensembliste  $m : 2^{\mathcal{X}} \rightarrow [0, 1]$  satisfaisant :  $m(\emptyset) = 0$  et  $\sum_{A \subseteq \mathcal{X}} m(A) = 1$ .

Les sous-ensembles  $A \subseteq \mathcal{X}$  ayant une masse strictement positive sont appelés éléments focaux et forment un ensemble noté  $\mathbb{F}$ .  $(m, \mathbb{F})$  est appelé corps d'évidence.

Une *fonction de croyance*  $Bel : 2^{\mathcal{X}} \rightarrow [0, 1]$  est une fonction ensembliste qui mesure à quel degré un événement  $A$  est prouvé par nos informations et définie comme suit :  $Bel(A) = \sum_{B \subseteq \mathcal{X}, B \subseteq A} m(B)$ .

Une *fonction de plausibilité*  $Pl : 2^{\mathcal{X}} \rightarrow [0, 1]$  est une fonction ensembliste qui mesure à quel degré un événement  $A$  est cohérent avec nos informations et définie comme suit :  $Pl(A) = \sum_{B \subseteq \mathcal{X}, B \cap A \neq \emptyset} m(B)$ .

#### 3.2 Opération d'addition sur des proportions imprécises

Notons le simplexe unitaire par

$$\mathbb{U} = \{(\theta_1, \dots, \theta_n) \in [0, 1]^n : \sum_{i=1}^n \theta_i = 1\}.$$

Considérons deux ensembles de pièces  $sf^1$  et  $sf^2$  constituées de matériaux parmi  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  avec des masses physiques  $w^1$  et  $w^2$  respectivement. Les informations sur les proportions des différents types de matériaux dans  $sf^1$  et  $sf^2$  sont fournies respectivement par les corps d'évidence  $(m^1, \mathbb{F}^1)$  et  $(m^2, \mathbb{F}^2)$  définis sur  $\mathbb{U}$ , avec des éléments focaux discrets en nombre fini. Un élément focal dans  $\mathbb{F}^1$  (resp.  $\mathbb{F}^2$ ) est exprimé sous la forme  $J = J_1 \times \dots \times J_n$  (resp.  $K = K_1 \times \dots \times K_n$ ) où  $J_i$  (resp.  $K_i$ ),  $i \in \{1, \dots, n\}$  est une information imprécise sur la proportion de  $s_i$  dans  $sf^1$  (resp.  $sf^2$ ).

L'information résultant de l'ajout de  $sf^2$  avec  $sf^1$  est une fonction de masse notée  $m^{1 \oplus 2}$  et

définie comme suit pour  $I \subset \mathbb{U}$  [2] :

$$m^{1\oplus 2}(I) = \sum_{\substack{J \in \mathbb{F}^1, K \in \mathbb{F}^2 \\ I = J \boxplus K}} m^1(J) \cdot m^2(K), \quad (2)$$

où  $\mathbb{F}^{1\oplus 2}$  est un ensemble fini composé de sous-ensembles discrets de  $\mathbb{U}$  résultant de la somme des proportions dans  $\mathbb{F}^1$  et  $\mathbb{F}^2$  ; le poids total associé au mélange est  $w^1 + w^2$  et  $\boxplus$  est défini pour deux éléments focaux  $J \in \mathbb{F}^1$  et  $K \in \mathbb{F}^2$  comme suit :

$$J \boxplus K = I_1 \times \dots \times I_n,$$

avec

$$I_i = \left\{ \frac{w^1 x + w^2 y}{w^1 + w^2}, x \in J_i, y \in K_i \right\}.$$

Notons que dans le cas où les informations imprécises sont des ensembles convexes, e.g., des intervalles, seules les bornes inférieures et supérieures des intervalles sont impliquées dans le calcul de  $J \boxplus K$  [2].

**Exemple 1.** Considérons le cas où  $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$  et deux ensembles de pièces  $sf^1$  et  $sf^2$  tous les deux composés d'une seule pièce pesant chacune 1 kg. Dans le Tableau 1, nous donnons un exemple de deux corps d'évidence pour  $sf^1$  et  $sf^2$ . Les éléments focaux présentés dans le Tableau 1 ont la signification suivante :  $J_1$  signifie "  $sf^1$  est un matériau pur de type  $s_1$  ou  $s_2$ ", et  $J_2$  signifie "  $sf^1$  est un matériau pur de type  $s_2$ ". Le même raisonnement s'applique à  $K_1$  et  $K_2$ .

La fonction de masse obtenue lors du mélange de  $sf^1$  et  $sf^2$  est donnée par son corps d'évidence  $(\{I_1, I_2, I_3, I_4\}, m^{1\oplus 2})$  comme suit :

$$I_1 = J_1 \boxplus K_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\} \times \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\} \times \{0\} \times \{0\}$$

$$I_2 = J_1 \boxplus K_2 = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\} \times \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \times \{0\} \times \{0\}$$

$$I_3 = J_2 \boxplus K_1 = \left\{0, \frac{1}{2}\right\} \times \left\{\frac{1}{2}, 1\right\} \times \{0\} \times \{0\}$$

$$I_4 = J_2 \boxplus K_2 = \left\{\frac{1}{2}\right\} \times \left\{\frac{1}{2}\right\} \times \{0\} \times \{0\}$$

avec  $m^{1\oplus 2}(I_1) = 0.3$ ,  $m^{1\oplus 2}(I_2) = 0.2$ ,  $m^{1\oplus 2}(I_3) = 0.3$  and  $m^{1\oplus 2}(I_4) = 0.2$ .

### 3.3 Inférence à partir de proportions imprécises

L'ensemble  $A_\alpha$  des vecteurs de proportions satisfaisant  $\sum_{i \in A} \theta_i \leq \alpha$  présente un intérêt pour notre problème car il permet d'exprimer des contraintes que les conteneurs doivent respecter, comme l'indique l'équation (1b). Étant donné les éléments focaux  $I = I_1 \times \dots \times I_n$ , dans le cas où  $I_i = [\ell_i, u_i]$  sont des intervalles, il a été montré que [2] :

$$I \subseteq A_\alpha \Leftrightarrow \min\left(\sum_{s_i \in A} u_i, 1 - \sum_{s_i \notin A} \ell_i\right) \leq \alpha$$

$$I \cap A_\alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow \max\left(\sum_{s_i \in A} \ell_i, 1 - \sum_{s_i \notin A} u_i\right) \leq \alpha$$

Dans le cas discret où  $I_i = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{|I_i|}\}$ ,  $\tau_i \in [0, 1]$ , les deux formules précédentes restent valables si l'on considère  $u_i = \max_{t=1, \dots, |I_i|} \tau_t$  et  $\ell_i = \min_{t=1, \dots, |I_i|} \tau_t$ .

### 3.4 Intégrale de Choquet

L'intégrale de Choquet [4] s'applique aux mesures non additives, souvent appelées mesures floues [5]. Une fonction de croyance définie sur un espace  $S$  étant une mesure floue<sup>1</sup>, une intégrale Choquet basée sur  $Bel$ ,  $IC_{Bel}(y)$ , est définie pour un vecteur de valeurs positives réelles  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{+n}$  comme suit :

$$IC_{Bel}(y) = \sum_{i=1}^n (y_{\sigma(i)} - y_{\sigma(i-1)}) Bel(S_{\sigma(i)}) \quad (3)$$

où  $S_{\sigma(i)} = \{s_{\sigma(i)}, s_{\sigma(i+1)}, \dots, s_{\sigma(n)}\}$  et  $\sigma$  est une permutation sur  $\{1, \dots, n\}$  telle que  $0 = y_{\sigma(0)} \leq y_{\sigma(1)} \leq y_{\sigma(2)} \leq \dots \leq y_{\sigma(n)}$ .

1. elle est telle que  $Bel(\emptyset) = 0$ ,  $Bel(S) = 1$  et est monotone, c'est-à-dire  $A \subseteq B \Rightarrow Bel(A) \leq Bel(B)$

Tableau 1 – Corps d'évidence des deux pièces

$sf^1 (w^1 = 1kg)$		$sf^2 (w^2 = 1kg)$	
$\mathbb{F}^1$	$m^1$	$\mathbb{F}^2$	$m^2$
$J_1 = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0\} \times \{0\}$	0.5	$K_1 = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0\} \times \{0\}$	0.6
$J_2 = \{0\} \times \{1\} \times \{0\} \times \{0\}$	0.5	$K_2 = \{1\} \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\}$	0.4

Si  $Bel = Pl$ , alors l'équation (3) est simplement l'opérateur d'espérance standard. Sinon, elle peut être interprétée comme la plus faible espérance prise sur toutes les probabilités telles que  $Bel \leq P \leq Pl$ , c'est-à-dire toutes les probabilités délimitées par nos connaissances imprécises.

#### 4 Énoncé du problème d'optimisation de mélange dans le cadre des fonctions de croyance

Supposons que nous disposons des informations suivantes au moment de l'arrivée d'une nouvelle pièce  $f$  à ajouter à un des conteneurs : une fonction de masse  $m(.|f)$  sur  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ , et les fonctions de masse  $m^c$  sur  $\mathbb{U}$  représentant nos croyances sur les proportions de matériaux dans chaque conteneur  $c \in \{1, \dots, C\}$ . Notons qu'on peut facilement passer d'une masse  $m(.|f)$  sur  $S$  à une masse sur  $\mathbb{U}$  (voir l'exemple 1).

De même que dans la section 2, nous ne serons intéressés qu'à modéliser le gain potentiel de l'ajout de la nouvelle pièce  $f$  à l'un des conteneurs, sans se soucier des proportions actuelles du conteneur, car celles-ci seront traitées par les contraintes. Si  $g$  est le gain global d'un conteneur contenant des matériaux de types spécifiques dans  $\bar{A}$ , i.e., le complément de  $A$  dans  $S$ , où les éléments  $A \subset S$  sont considérés comme des impuretés dont le pourcentage ne doit pas dépasser  $\alpha_c$ , nous prenons par exemple la fonction simple  $g_c(s) = g(s)$  pour  $s \in \bar{A}$ , et  $g_c(s) = \alpha_c \cdot g(s)$ . la nouvelle fonction objective s'écrit simplement comme suit :

$$\max_{c \in \{1, \dots, C\}} C_{Bel(.|f)}(g_c(s_1), \dots, g_c(s_n)) \quad (4)$$

La fonction objectif (4) est une valeur d'espérance basée sur l'intégrale de Choquet où les gains sont pondérés en fonction de notre croyance sur le type de matériau de  $f$ .

Notons le poids physique de  $f$  par  $w^f$  et le poids physique actuel du conteneur  $c$  par  $w^c$ . La formule (2) nous donne la nouvelle fonction de masse  $m^{f \oplus c}$  lors de l'ajout de  $f$  au conteneur  $c$ . Les contraintes de (1b) imposent le respect des seuils d'impuretés tolérées dans les conteneurs et impliquent une mesure de probabilité que nous allons remplacer par la paire  $(Bel^{f \oplus c}, Pl^{f \oplus c})$ . Nous pouvons raisonnablement exiger que le degré de certitude de satisfaction d'une contrainte soit très élevé et que le degré de plausibilité de cette même satisfaction soit proche de 1. Ce qui donne les deux contraintes suivantes pour tout  $c = 1, \dots, C$  :

$$Bel^{f \oplus c}(h_c(\theta_1, \dots, \theta_n) \leq 0) > \eta_c, \quad (5a)$$

$$Pl^{f \oplus c}(h_c(\theta_1, \dots, \theta_n) \leq 0) \sim 1. \quad (5b)$$

où les  $\eta_c \in ]0, 1]$  sont assez grands. Notons que de telles idées ne sont pas nouvelles et ont par exemple été récemment appliquées au problème du voyageur de commerce [1].

Notons  $A_\alpha$  l'ensemble des vecteurs de proportions satisfaisant  $\sum_{i \in A} \theta_i \leq \alpha$ . Dans la section 3.3, nous montrons comment déterminer  $Bel(A_\alpha)$  et  $Pl(A_\alpha)$  qui sont nécessaires pour vérifier les contraintes (5a) et (5b).

Finalement, nous obtenons le problème d'optimisation suivant :

Tableau 2 – Gains des conteneurs.

	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$
conteneur 1	100\$	100\$	5\$	5\$
conteneur 2	5\$	5\$	100\$	100\$
conteneur 3	1\$	1\$	1\$	1\$

$$\max_{c \in \{1, \dots, C\}} C_{Bel(\cdot|f)}(g_c(s_1), \dots, g_c(s_n)) \quad (6a)$$

sous les contraintes : pour tout  $c=1, \dots, C$

$$Bel^{f \oplus c}(h_c(\theta_1^c, \dots, \theta_n^c) \leq 0) > \eta_c, \quad (6b)$$

$$Pl^{f \oplus c}(h_c(\theta_1^c, \dots, \theta_n^c) \leq 0) \sim 1, \quad (6c)$$

$$\sum_{i=1}^n \theta_i^c = 1. \quad (6d)$$

Pour résoudre le problème d'optimisation (6a) - (6d), il faut évaluer (6a) pour chaque conteneur pour l'ensemble des pièces dans le dépôt. Des problèmes de complexité surviennent lorsque le nombre des pièces est très important. En effet, le nombre d'éléments focaux impliqués lors de la détermination de  $Bel^{f \oplus c}$  (6b) et  $Pl^{f \oplus c}$  (6c) devient exponentiel, mais nous pouvons résoudre ce problème en considérant des approximations (par exemple, en supprimant les éléments focaux de très petites masses).

## 5 Illustration

Dans cette section, nous présentons une application concernant le tri du plastique. Les fragments de plastique issus d'un dépôt doivent être séparés par types de matériaux dans différents conteneurs avant le recyclage pour des raisons physico-chimiques liées à leur non-miscibilité.

Cependant, les informations acquises en ligne sont sujettes à plusieurs problèmes impliquant la présence d'une part d'imprécision, c'est-à-dire que certaines informations sur les caractéristiques ne sont pas suffisamment précises pour établir des distinctions claires entre les types de matériaux, et d'autre part d'incertitude concernant la fiabilité des informations à cause des perturbations atmosphériques, etc. [3]. Étant donné qu'une petite quantité de plastiques mal triés peut entraîner une forte diminution de la résistance aux chocs [7] et de la valeur monétaire, les impuretés doivent être limitées. Ainsi, les experts ont défini un seuil de

tolérance sur les proportions d'impuretés. Dans cette illustration, nous proposons une procédure de tri basée sur la résolution du problème d'optimisation (6a) - (6d). L'identification du type de matériau de chaque fragment est obtenue par un classifieur évidentiel [3].

### 5.1 Présentation des données

Considérons un dépôt de déchets plastiques composé de 25 fragments de quatre types de matériaux  $s_1, s_2, s_3, s_4$ . Tous les fragments ont un poids fixe  $w = 1$ . Chaque fragment doit être soufflé dans l'un des trois conteneurs dédiés à des types de matériaux spécifiques. Le premier conteneur est dédié aux types de plastiques  $s_1, s_2$  et les proportions d'impuretés de  $s_3, s_4$  ne doivent pas dépasser  $\alpha_1 = 0,05$ . Le second conteneur est dédié aux types de plastiques  $s_3, s_4$  et les proportions d'impuretés de  $s_1, s_2$  ne doivent pas dépasser  $\alpha_2 = 0,05$ . Le troisième conteneur constitue l'option de rejet, ainsi tous les types de plastiques peuvent être considérés comme des impuretés (ou considérés comme des matériaux valides), mais il n'est pas nécessaire de les contrôler, donc  $\alpha_3 = 1$ . Le Tableau 2 donne les gains considérés pour les conteneurs.

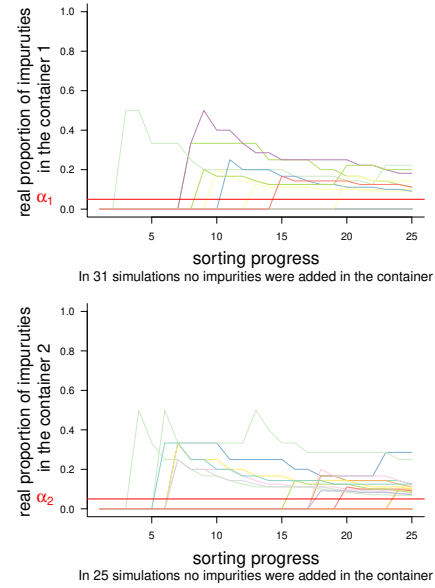
La base de données utilisée pour l'expérimentation est constituée de 23365 fragments dont les spectres sont acquis industriellement.

## 5.2 Simulations

Le classifieur est entraîné sur 11747 exemples et appliqué sur l'ensemble de test, soit 11618 autres exemples. Nous obtenons, ainsi, 11618 fonctions de masse  $m(\cdot|f_1), \dots, m(\cdot|f_{11618})$ . Afin d'évaluer la procédure de tri, nous avons testé les performances sur 40 simulations de flux de fragments, i.e., suite aléatoire de fragments à trier comme s'ils arrivaient sur le convoyeur. La simulation d'un flux a été effectuée en sélectionnant aléatoirement des fragments de test parmi  $f_1, \dots, f_{11618}$ . Pour des raisons de temps de calcul, nous avons arrêté la procédure de tri au 25e fragment pour chaque simulation. Notons que la complexité de la procédure de tri est exponentielle, c'est-à-dire  $\mathcal{O}((2^{|S|})^{nb \text{ de fragments}})$  [2]. La Figure 1 montre l'évolution des proportions réelles d'impuretés. Chaque courbe représente une simulation et les seuils sont définis à  $\eta_1 = \eta_2 = 0,6$ . Nous observons que la proportion d'impuretés est la plupart du temps inférieure au seuil requis, sauf pour quelques simulations où des erreurs de classification sont commises pour les premiers fragments ajoutés dans les conteneurs 1 et 2. Étant donné qu'au début du tri, il n'y a que peu de fragments, les erreurs ont un fort impact sur les proportions.

Afin d'évaluer la qualité du matériau trié résultant, nous introduisons le score  $q_c$  comme le pourcentage des simulations respectant les contraintes de proportions d'impuretés à la fin du tri dans le conteneur  $c$ . Avec l'approche proposée, nous obtenons  $q_1 = 77,5\%$  et  $q_2 = 62,5\%$ . Ceci est nettement supérieur aux niveaux requis de 60 %, ce qui est en accord avec le fait que nous agissons avec prudence. En termes de gains, le gain moyen obtenu dans les simulations est de 1901.475 \$ alors que le gain optimal est de 2500 \$ correspondant au cas idéal où tous les fragments sont triés dans le bon conteneur. Cet optimal est atteint quand les résultats de classification sont parfaits, ce qui est peu probable.

Figure 1 – Evolution des proportions réelles d'impuretés dans les conteneurs 1 et 2.



## 5.3 Discussion

Afin de convaincre de l'intérêt de la procédure de tri basée sur la résolution du problème d'optimisation (6a) - (6d), nommé ici *procédure évidentielle*, nous la comparons à la *procédure stochastique* basée sur la résolution du problème d'optimisation stochastique (1a) - (1c) et à la *procédure déterministe* basée sur la résolution du problème d'optimisation de mélange dans le cas où le type de matériau de chaque fragment du dépôt est donnée de façon précise. La procédure stochastique est basée sur la probabilité pignistique dérivée de  $m(\cdot|f)$  tandis que la *procédure déterministe* est basée sur les résultats d'un classifieur produisant une prédiction ponctuelle. Les résultats des simulations sont présentés dans le Tableau 3. Deux critères sont utilisés pour effectuer cette comparaison : la qualité des matériaux résultants dans les deux conteneurs  $q_1, q_2$ ; et le taux de gain moyen obtenu sur toutes les simulations, noté *Rag*.

Nous remarquons que le fait de ne pas tenir compte de l'incertitude ou de considérer un modèle moins expressif (c'est-à-dire les probabilités) apporte en effet un meilleur gain

Tableau 3 – Comparaison des procédures

Procédures	$R_{ag}$	$q_1$	$q_2$
Evidential	0.76059	<b>77.5 %</b>	<b>62.5 %</b>
Probabiliste	0.77984	67.5 %	57.5 %
Deterministe	<b>0.9297</b>	52.5 %	27.5 %

moyen, mais ne permet pas de respecter les contraintes imposées aux conteneurs pour qu'ils soient utilisables. Cela pourrait être résolu en envisageant des gains plus pénalisant en cas de mauvais tri pour les *procédures déterministe* et *stochastique*, mais cela complexifierait la procédure. Ainsi, la *procédure évidentielle* semble préférable pour les applications où les contraintes sur les impuretés sont fortes, c'est-à-dire pour de très petits seuils  $\alpha$  ou lorsque le niveau de confiance requis pour l'application est élevé, c'est-à-dire  $\eta$  plus proche de 1.

## 6 Conclusion

Nous avons proposé dans cet article une formulation du problème de mélange de types de matériaux dans le cadre des fonctions de croyance. L'utilité de ce travail est illustrée par la procédure de tri des matières plastiques. Une approche par étapes est proposée pour éviter la résolution complète trop complexe calculatoirement. Comme perspective pour ce travail, nous envisageons d'optimiser l'opération d'addition séquentielle des fonctions de masse dans la procédure de tri en ligne en contrôlant le nombre d'éléments focaux générés à chaque étape afin de surmonter la complexité exponentielle.

## Références

[1] Nathalie Helal, Frédéric Pichon, Daniel Pombel, David Mercier, and Éric Lefèvre. The capacitated vehicle routing problem

with evidential demands. *International Journal of Approximate Reasoning*, 95 :124–151, 2018.

[2] Lucie Jacquin, Abdelhak Imoussaten, Sébastien Destercke, François Troussel, Jacky Montmain, and Didier Perrin. Manipulating focal sets on the unit simplex : Application to plastic sorting. In *2020 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*. IEEE, 2020.

[3] Lucie Jacquin, Abdelhak Imoussaten, François Troussel, Jacky Montmain, and Didier Perrin. Evidential classification of incomplete data via imprecise relabelling : Application to plastic sorting. In *International Conference on Scalable Uncertainty Management*, pages 122–135. Springer, 2019.

[4] Christophe Labreuche and Michel Grabisch. The choquet integral for the aggregation of interval scales in multicriteria decision making. *Fuzzy Sets and Systems*, 137(1) :11–26, 2003.

[5] Toshiaki Murofushi and Michio Sugeno. An interpretation of fuzzy measures and the choquet integral as an integral with respect to a fuzzy measure. *Fuzzy sets and Systems*, 29(2) :201–227, 1989.

[6] Glenn Shafer. *A mathematical theory of evidence*, volume 42. Princeton university press, 1976.

[7] Charles Signoret, Anne-Sophie Carobretelle, José-Marie Lopez-Cuesta, Patrick Ienny, and Didier Perrin. Mir spectral characterization of plastic to enable discrimination in an industrial recycling context : Ii. specific case of polyolefins. *Waste Management*, 98 :160–172, 2019.

[8] Philippe Smets and Robert Kennes. The transferable belief model. *Artificial intelligence*, 66(2) :191–234, 1994.